Examen Final de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas Grupo A
8 de julio de 2003

1. Sea f una función holomorfa en el disco $D(28\,i, 8)$.

   a) Probar que la función $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa en el disco $D(-28\,i, 8)$.

   b) ¿Es holomorfa la función $h(z) = f(\bar{z})$?

2. Calcular justificadamente la integral

   $$\int_\Gamma \frac{\operatorname{sen} z}{(z+1)^2(z-\pi)^3}\,dz$$

   donde Γ es el ciclo formado por los caminos γ_1 y γ_2. Siendo γ_1 la poligonal $\bigcup_{j=1}^{4}[z_j, z_{j+1}]$ con $z_1 = \pi - 1 + i$, $z_2 = \pi - 1 - i$, $z_3 = \pi + 1 - i$, $z_4 = \pi + 1 + i$, $z_5 = z_1$; y $\gamma_2(t) = -1 + \mathrm{e}^{-it}$, donde $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$.

3. Determinar el más grande abierto donde $f(z) = \dfrac{(z^2-1)(z-3)^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}$ define una función holomorfa y clasificar todas las singularidades.

4. Determinar la transformación de Möebius, T, de segunda especie que tiene como puntos dobles $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$. ¿Puede tener T más puntos dobles? Si la respuesta es afirmativa, determínense todos ellos.

Tema: Teoremas de Liouville y Fundamental del Álgebra.